

УДК 536:681.51.015

**В. К. Толстых<sup>1)</sup>, Н. А. Володин<sup>2)</sup>****ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
В ЗАТВЕРДЕВАЮЩИХ ОТЛИВКАХ**

*На основе экспериментальных данных рассматривается задача идентификации эффективного коэффициента теплопроводности в затвердевающей отливке. Определяется принципиальная возможность ее решения с условиями идентифицируемости, полученными и реализованными в данной работе.*

Качество математического моделирования процессов тепломассопереноса существенно зависит от решения задачи параметрической идентификации и в основном определяется точностью коэффициентов, входящих в уравнения конвекции и тепломассопереноса. Достоверные значения этих коэффициентов могут быть получены только из решения соответствующих обратных задач [1, 2]. Рассмотрим проблему идентифицируемости эффективных теплофизических параметров, позволяющих отказаться от расчета уравнений конвекции и тем самым существенно упростить вычислительные схемы. Предлагаемый алгоритм идентификации построен на классических теориях решения прямых задач и методах оптимизации.

В качестве примера рассмотрим одномерный процесс теплообмена расплава со стенкой изложницы и окружающей средой в начальной стадии затвердевания:

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0, \quad (t, x) \in (t_a, t_b] \times (x_0, x_1). \quad (1)$$

Поскольку эффективная теплопроводность  $\lambda_e$  в расплаве при  $x \in (x_0, x_1)$  считается однородной, а в стенке изложницы при  $x \in (x_1, x_2)$  – известной и равной  $\lambda_1$ , то можно записать  $\lambda(t, x) = \lambda_1 + [\lambda_e(t) - \lambda_1] \Theta(x - x_1)$ . При этом уравнение (1) преобразуется к виду [3]

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - (\lambda_e - \lambda_1) \delta(x_1 - x) \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Граничные и начальные условия следующие:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x_0} = 0, \quad \lambda_1 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x_2} = -\alpha (T - T_{\text{out}}), \quad T|_{t_a} = T_a.$$

Качество идентификации  $\lambda_e(t)$  будем оценивать по расхождению экспериментально определенной температуры расплава  $T_g(t)$  в некоторой точке  $x_g \in (x_0, x_1)$  и рассчитанной там же по модели (2) температуры  $T(t, x_g)$

$$J(\lambda_e) = \int_{t_a}^{t_b} [T(t, x_g) - T_g(t)]^2 dt. \quad (3)$$

Применяя прямой экстремальный подход [4], строим итерационный алгоритм поиска оптимального значения параметра  $\lambda_e(t)$

$$\lambda_e^{k+1}(t) = \lambda_e^k(t) - b^k \beta(t) \nabla J(\lambda_e^k; t), \quad b^k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Здесь градиентом функционала (3) является

$$\nabla J = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (t, x) \in (t_a, t_b) \times x_*. \quad (5)$$

Он вычисляется в некоторой точке расплава  $x_*$  через решение  $f(t, x)$  сопряженной задачи

$$C_p \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\lambda_e - \lambda_1) \delta(x - x_1) \frac{\partial f}{\partial x} - 2(T - T_g) \delta(x - x_g) = 0. \quad (6)$$

Граничные и "начальное" условия для (6) имеют вид

<sup>1)</sup> Донецкий национальный университет; э-почта: tvk@dongu.donetsk.ua; <sup>2)</sup> Донецкий национальный технический университет. Поступила 05.02.2002, в окончательной редакции – 03.09.2002.

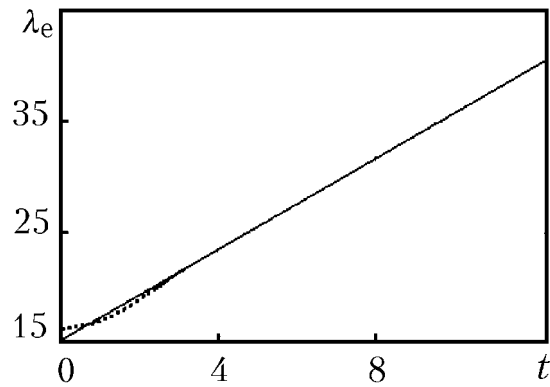


Рис. 1. Тестирование алгоритма идентификации: сплошная кривая – точное значение  $\lambda_e(t)$ ; пунктир – идентифицированное  $\lambda_e(t)$  по алгоритму (4) с условием (7).  $\lambda_e$ , Вт/(м·К);  $t$ , с

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_2} = -\alpha f, \quad f|_{t_b} = 0.$$

Особенность прямого экстремального подхода к решению задачи идентификации (2), (3) с алгоритмом (4), например, в сравнении с [1], заключается в том, что он не требует ни предварительной дискретизации задачи, ни разложения искомой функции  $\lambda_e(t)$  в ряды.

Перейдем к анализу идентифицируемости рассматриваемой задачи с позиции [5]. Прямые задачи (2) и (6) имеют параболический тип. Хорошо известно, что с помощью соответствующих разностных схем можно получить корректное решение таких задач [6]. Из выражения (6) видно, что нетривиальное (не тождественно нулевое) решение сопряженной задачи возможно только при  $x_g < x_* < x_1$ . Это следует из наличия  $\delta$ -функции в свободном члене уравнения. Именно он является источником такого решения. При интегрировании (6)  $\delta$ -функция преобразуется к  $\Theta$ -функции, отличной от нуля справа от  $x_g$ . Следовательно, (6) будет иметь ненулевое решение  $f$  только справа от  $x_g$ .

Таким образом, эффективное значение коэффициента теплопроводности  $\lambda_e$  в модели (2) идентифицируемо по целевому функционалу (3) при

$$x_g < x_* < x_1. \quad (7)$$

На рис. 1 приведены результаты тестирования прямого алгоритма (4) с условием (7). Тестовые расчеты организовывались по следующей схеме. Задавалось некоторое значение эффективного коэффициента теплопроводности (сплошная кривая на рис. 1) и решалась исходная задача (2). Найденная температура принималась в качестве экспериментальной  $T_g$ , на основе которой по алгоритму (4) решалась обратная задача о нахождении  $\lambda_e(t)$ , сводящий функционал к минимуму (3).

Всего за 21 итерацию при  $\beta(t) = 0.2\lambda_e^0(t)/|\nabla J(\lambda_e^0; t)|$  и  $\lambda_e^0(t) = 5$  Вт/(м·К) было получено решение (пунктирная кривая на рис. 1), которое практически совпало с точным значением искомого параметра. Заметим, что расчеты без учета условия идентифицируемости (7) приводили к неверным результатам, а игнорирование параметра  $\beta$ , регулирующего направление спуска к  $\min J$  с учетом чувствительности  $J$  к  $\lambda_e$ , катастрофически снижало скорость сходимости и не позволяло достичь точного решения за конечное число итераций. Полученные тестовые расчеты демонстрируют достоверность и высокую эффективность метода.

На рис. 2 приведены результаты идентификации эффективного коэффициента теплопроводности  $\lambda_e$  за 25 итераций алгоритмом (4) для реального процесса затвердевания стального расплава в цилиндрической

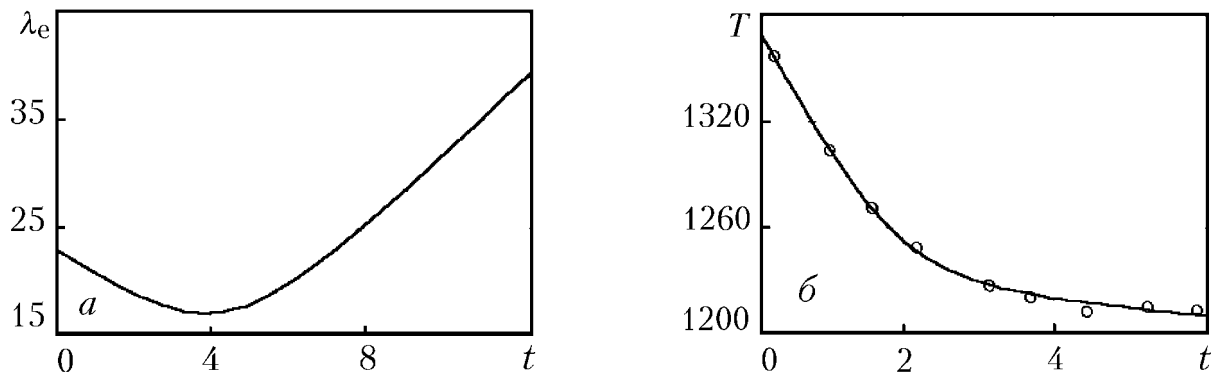


Рис. 2. Результаты идентификации эффективного коэффициента теплопроводности – а и температуры слитка в точке  $x_g$ , рассчитанной по модели (2), – б. Точки – экспериментальная температура.  $\lambda_e$ , Вт/(м·К);  $T$ , К;  $t$ , с

изложнице на основе экспериментальных данных [7]. Толщина стенки литейной оснастки  $x_2 - x_1 = 0.03$  м, радиус отливки  $x_1 - x_0 = 0.08$  м, координата термодатчика  $x_g = 0.04$  м. Принятое соотношение линейных размеров отливки и использование эффективного значения  $\lambda_c$  позволяют применять одномерную модель процесса затвердевания [7]. Параметры  $\alpha = 580$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $C = 650$  Дж/(кг·К),  $\rho = 6950$  кг/м<sup>3</sup>,  $T_{out} = 300$  К,  $T_a = 1673$  К.

Найденное по алгоритму (4) значение функции  $\lambda_c(t)$  для математической модели (2) с условием идентифицируемости (7) показано на рис. 2, а. Результаты получены при начальном приближении  $\lambda_c^0(t) = 5$  Вт/(м·К), которому соответствовало максимальное расхождение температур  $\max |T(t, x_g) - T_g(t)| = 224$  К. Для найденного  $\lambda_c(t)$  оно составило всего лишь 4 К. Результаты эксперимента<sup>t</sup> и расчета температуры по полученной модели, приведенные на рис. 2, б, свидетельствуют о высокой точности моделирования процессов затвердевания.

Применение прямых экстремальных алгоритмов идентификации с предлагаемым анализом идентифицируемости позволяет эффективно решать обратные задачи идентификации с помощью только традиционных теорий решения прямых задач.

### Обозначения

$C, \rho$  – теплоемкость и плотность расплава;  $\lambda$  – теплопроводность;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $T$  – температура;  $x$  – координата;  $x_0$  – центр отливки;  $x_1$  – граница "отливка-оснастка";  $x_2$  – граница "оснастка-окружающая среда";  $x_g$  – координата термодатчика;  $t$  – время;  $\Theta$  и  $\delta$ -функция Хевисайда и дельта-функция;  $J$  – целевой функционал;  $\nabla J$  – градиент целевого функционала (линейный функционал);  $b^k$  – шаг метода;  $\beta$  – параметр регулирования сходимости оптимизирующего алгоритма;  $f$  – сопряженное состояние (линейный функционал). Нижние индексы: e – эффективное; out – внешняя среда; g – датчик; a и b – начальное и конечное время процесса; \* – область идентифицируемости. Верхние индексы: 0 – начальное приближение; k – номер итерации.

### Литература

1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М., 1988.
2. Коздоба Л. А., Круковский П. Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев, 1982.
3. Огурцов А. П., Недопекин Ф. В., Толстых В. К., Володин Н. А. Прямая оптимизация теплофизических процессов. Донецк, 1997.
4. Толстых В. К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами. Донецк, 1997.
5. Толстых В. К. // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 49–56.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1977.
7. Бородин В. С., Мелихов В. М., Петренко Л. П., Гридин С. В. // Процессы литья. 1992. № 3. С. 29–33.